



Kapitel 8. Engineering og matematik

I kapitlet introduceres en række didaktiske potentialer for anvendelse af engineering som praksisfaglig didaktik i skolefaget matematik. Undervejs underbygges de matematikfaglige muligheder med engineering, med eksempler på en matematikundervisning som er anvendelsesorienteret, og hvor eleverne udvikler matematiske handle- og tænkemåder fx gennem undersøgende matematik og matematisk modellering i designprocessen.

Engineering og matematik

Skolefaget matematik udgør M'et i STEM-undervisning, men der er stadig forholdsvis få eksempler fra praksis, hvor matematik integreres med de øvrige STEM-fag som et ligeværdigt og bærende element, også når der arbejdes problembaseret.

Funktionel integration af matematik i engineering-undervisningen forudsætter et bevidst valg og en eksplicit indsats fra læreren, så der i designprocessen løbende er fokus på at inddrage matematik både ift løsning af den konkrete udfordring og som bidrag til øget matematisk læring hos eleverne.

I dette kapitel udfoldes forskellige tilgange til god fagintegration af matematik i en praksisfaglig engineering-tilgang, herunder udvalgte matematikfaglige pointer og sammenhænge, der har særlig relevans for engineering-undervisningen, og som samtidig kan berige matematikfaget og undervisningen i matematik.

Engineering som praksisfaglig didaktik i matematik

Et af de helt store potentialer i at kombinere engineering og matematik er, at man kan forbinde matematik tættere med omverdenen og give eleverne en virkelighedsnær forståelse af matematiske metoder og begreber og deres praktiske anvendelse i virkelige problemstillinger.

Når matematikken gennem arbejdet med engineering bliver mere anvendelsesorienteret, lærer eleverne ikke blot at løse opgaver og problemer af rent matematisk karakter, men også at anvende deres matematiske færdigheder og kompetencer til at tackle virkelige teknologiske udfordringer.

En praksisfaglig dimension er anvendelsesorientering, og i matematik står det også centralt i fagformålet, da det åbner mulighederne for, at eleverne både styrker deres matematiske handle- og tænke-måder og deres forståelse af, hvordan matematik bliver brugt i samfundet.

I arbejdet med autentiske engineering-udfordringer får eleverne mulighed for at opleve matematik som et nødvendigt redskab til problemløsning, og de kan udvikle et nuanceret blik på matematikken og dens anvendelse, her som en central del af fx ingeniørers måde at arbejde på og som et nødvendigt og uundværligt element i den teknologiske udvikling.

Engineering gør også matematikfaget mere praksisfagligt, når faget bidrager til, at eleverne udvikler og forbedrer en prototype. Det opleves motiverende, og det bliver håndgribeligt fagligt at samles om og referere til – både for gruppearbejdet og ved fælles opsamlinger med fokus på det matematikfaglige læringsudbytte.

I læreplanerne til matematik fra 2019 beskrives under fagets identitet en undervisning, som konkretiserer fagets formål, og som tydeliggør, hvorfor engineering er relevant i matematikundervisningen. For eksempel skal der være fokus på, hvor i vores verden vi møder matematikken. I det møde er det sjældent, at der er én givet fremgangsmåde og én måde at formidle et resultat på, og undervisningen må derfor sætte matematikken ind i undersøgende og problemløsende sammenhænge. Det er netop det, engineering kan bidrage med.

Her er eksempler på områder fra matematiks formål, hvor der er et meningsfuldt match med engineering som praksisfaglighed.

Eleverne skal have mulighed for at:

- opdage, beskrive, fortolke og forklare fænomener i verden ved hjælp af matematik
- udvikle begreber og metoder
- indgå i processer som beskrevet i de matematiske kompetencer
- forholde sig vurderende til matematikkens anvendelse
- deltage i udviklingen af matematiske modeller
- reflektere over de muligheder og begrænsninger, der kan være ved konkrete modeller.

Desuden fremmer engineering muligheden for at arbejde selvstændigt og sammen med andre og at være en aktiv, undersøgende og ligeværdig deltager i klassens samarbejde om og med matematik.

På næste side er et eksempel på hvordan engineering kan se ud i matematikundervisning. I eksemplet udvikler og analyserer eleverne matematiske modeller, de beskriver, fortolker og forklarer fænomener ved hjælp af matematik og de forholder sig vurderende til matematikkens anvendelse. I løbet af elevernes designproces reflekterer de desuden over de muligheder og begrænsninger, der kan være ved konkrete modeller.



EKSEMPEL 1

MATEMATIK OG SMÆK PÅ TRANSPORTEN

En 8.-klasse skal arbejde med matematik og engineering ud fra et narrativ om CO₂-udledning i forbindelse med transport. De skal konstruere en prototype, der kan køre så langt som muligt på den potentielle energi, der er lagret i en spændt musefælde. Klassens matematiklærer gennemfører forløbet hen over tre uger. Narrativ og udfordring lyder således:

Narrativ

Selvom vi måske ikke tænker så meget over det, så er vi alle sammen afhængige af forskellige typer transport. Vi skal til og fra skole, vores mad skal transporteres fra producenten og hjem i køkkenet, og der er hele tiden varer, der transporteres på tværs af jordkloden. 28 % af den samlede danske CO₂-udledning (2019) stammer fra transportsektoren. I har måske hørt om nye typer motorer, der skal mindske udledningen af CO₂, men der er også andre steder, der kan forbedres, for at energien kan udnyttes mere effektivt og CO₂-udledningen reduceres.

Udfordring og krav:

Konstruer en prototype, der kan køre så langt som muligt på den potentielle energi, der er lagret i en spændt musefælde. I skal forholde jer til, hvordan forskellige modeller kan bidrage til udvikling af løsninger, der kan reducere udledning af CO₂. I skal redegøre for, hvordan overvejelserne omkring jeres prototype kan have en betydning for reduktion af CO₂-udledning i forbindelse med transport.

Efter at eleverne er introduceret til problemet og til forskellige typer matematiske modeller, konstruerer de et modelkøretøj, som skal bruges til deres undersøgelser. Eleverne identificerer forskellige variable, som hjul diameter og musefældens placering, der kan påvirke energiuudnyttelsen af køretøjet, og designer undersøgelser af variabelens påvirkning af effektiviteten. Efter at eleverne har undersøgt deres variable, sættes der gang i matematiske diskussioner i grupperne, som understøttes af elevark om databehandling og regressionsanalyser i CAS-værktøjer. Herved trænes både kommunikations-, ræsonnements- og modelleringskompetencerne, og eleverne får mulighed for at benytte regressionsanalyse til at vurdere forskellige variable og træffe matematisk begrundende valg for udvikling af deres prototyper.

Afslutningsvis præsenterer alle grupper deres prototype, og det er tydeligt, at det fælles matematiske sprog, som eleverne kan bruge om køretøjernes egenskaber, giver faglige diskussioner undervejs. Klassen er særligt optaget af, hvordan kombinationer af justeringer på de forskellige variable kan optimere deres løsninger, og diskuterer, hvordan andre variable som friktion og vægt kan påvirke deres prototyper.

Opsummerende kan man sige, at når matematik og engineering tænkes sammen i grundskolen, kan eleverne opleve en praktisk og anvendelsesorienteret tilgang til matematik. De lærer at løse matematiske problemer i en tværfaglig kontekst og at anvende deres matematiske færdigheder og kompetencer til at tackle virkelige og teknologiske udfordringer. Dette styrker såvel deres matematiske kompetencer som deres forståelse af, hvordan matematik bruges i samfundet, samtidig med at det åbner mulighed for at udforske matematik på nye måder. Ved at arbejde med autentiske engineering-udfordringer får eleverne mulighed for at opleve matematik som et levende og nødvendigt redskab til problemløsning og derigennem blive nysgerrige på matematikkens rolle.

Matematikfaglighed i engineering

Udvikling af matematiske handle- og tænkemåder

Matematiske handle- og tænkemåder omhandler indsigtfuld parathed til at handle i situationer, hvor det er hensigtsmæssigt at bruge matematikken. Når elever arbejder med engineering i matematik, kan de altså også udvikle de matematiske handle- og tænkemåder. Disse matematiske handlinger er i engineering ofte fordelt mellem følgende handle- og tænkemåder: kommunikation, modellering, problembehandling samt ræsonnement og tankegang.

Matematikundervisning i grundskolen sigter mod at sætte eleverne i stand til at begå sig hensigtsmæssigt i deres møde med matematik i verden omkring dem. Det er centralt at arbejde med matematiske handle- og tænkemåder i autentiske situationer, der peger ud i elevernes livsverden, herunder at skulle omsætte kompleksiteten i virkeligheden til noget, der kan rummes af og behandles med matematikken. Det gælder fx evnen til at analysere en problemstilling, udvikle løsninger og kommunikere resultater, men det kan også handle om, hvordan man helt konkret afgrænser en model, så den på den mest hensigtsmæssige vis bidrager til den løsning, man arbejder hen imod. Engineering designprocessen kan vise eleverne, hvordan matematiske kompetencer kan bringes til anvendelse i verden omkring dem og kvalificere deres møde med verden.

Engineering-forløb og de enkelte delprocesser kan typisk bidrage til udviklingen af flere af de matematiske handle- og tænkemåder, men i hvilket omfang og i hvilken grad dette understøttes, afhænger af lærerens tilrettelæggelse af forløbet og elevernes valg i de enkelte delprocesser.

Udvikling af eksisterende matematiske færdigheder

I grundskolens matematikundervisning er det et centralt mål, at eleverne lærer at anvende matematik som et redskab til at forstå og beskrive verden omkring sig. Matematik er et system af redskaber, der hjælper eleverne med at analysere og løse problemer i hverdagen, samfundslivet og på arbejdsmarkedet.

Matematikfaget har som værktøj til problemløsning meget at byde ind med, og det kan i høj grad være med til at kvalificere engineering designprocessen. Det kan blandt andet være ved at analysere og kvantificere den verden, som engineering-udfordringen skal finde løsninger til, eller det kan være gennem helt grundlæggende færdigheder som tegning, målinger eller beregninger af fx målestoksforhold og lign., når eleverne er i delprocessen *konkretisere*.

Samtidig kan hele engineering designprocessen drage nytte af de matematiske handle- og tænkemåder, som eleverne udvikler i grundskolen. Matematik kan her bruges som værktøj til at kvantificere, modellere og optimere løsninger. For eksempel kan eleverne anvende algebra til at beskrive forhold, geometri til at forstå rumlige relationer, statistik til at undersøge faktiske forhold og sandsynlighed til at vurdere mulige udfald og risici.

Kobling mellem engineering designprocessen og matematiske handle- og tænkemåder

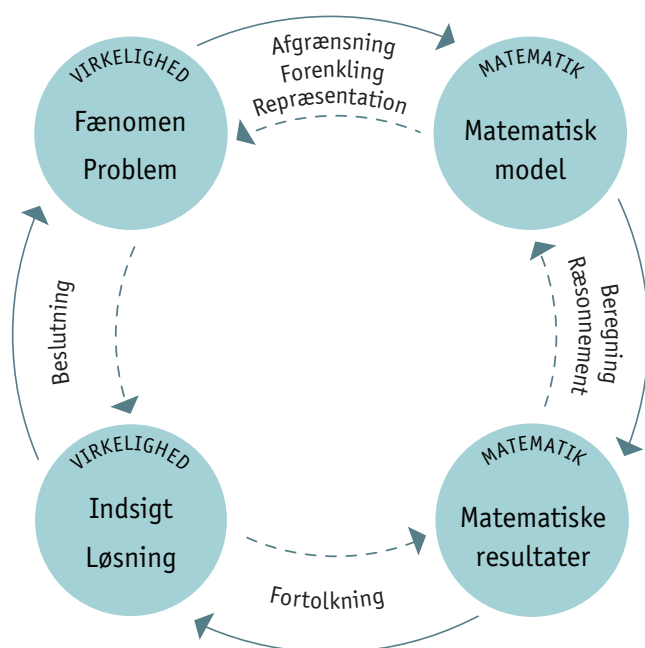
I en engineering designproces tager eleverne udgangspunkt i et autentisk problemfelt og arbejder for at løse en udfordring fra virkeligheden. En engineering designproces har derfor en helt særlig faglig sammenhæng med matematisk modellering, da det netop handler om at kunne håndtere noget fra virkeligheden, der i udgangspunktet ikke er matematisk, med matematik.

Den matematiske modelleringsproces kan opdeles i flere delprocesser, hvoraf en eller flere typisk vil indgå i en engineering designproces, og derfor vil det ofte være sådan, at eleverne udvikler deres modelleringskompetence i et engineering-forløb. Senere i afsnittet vises der, med to forløb, eksempler på, hvordan de øvrige matematiske handle- og tænkemåder kan komme til udtryk i de syv delprocesser.

Matematisk modellering og engineering

Når matematik anvendes for at løse et autentisk problem, er der tale om matematisk modellering. Modellering er nøglen til at bruge matematik ved problemanalyse, problembeskrivelse og problemløsning. Typisk kommer flere matematiske handle- og tænkemåder i spil, når der arbejdes med matematisk modellering, så eleverne kan udvikle flere af dem ved at tage udgangspunkt i matematisk modellering i en engineering-udfordring. I engineering beskæftiger eleverne sig altid med at finde en konkret løsning og konstruere en prototype. Herved kan eleverne opleve, at matematiske symboler, regneoperationer og metoder kan bruges til at skabe noget i virkelighedens verden.

Den matematiske modelleringsproces kan illustreres ved et diagram som i figur 8.1. Det centrale består i at komme fra et fænomen i virkeligheden til beskrivelsen af fænomenet gennem de matematiske repræsentationer, der samlet udgør modellen, og derefter tilbage igen. Når man har omsat virkeligheden til en matematisk model, kan den matematiske behandling af problemet efterfølgende foregå inden for matematikkens egne rammer med de dertil hørende symboler, regler og stringens.



Figur 8.1: Matematisk modellering er en proces, som på denne figur er illustreret gennem en række faser. Faserne er indbyrdes afhængige, og de fuldt optrukne pile angiver den fremadrettede sammenhæng. De stiplede pile angiver, at det undervejs i processen kan være nødvendigt at vende tilbage til en tidligere fase, fx hvis resultatet af en matematisk beregning ikke er brugbart til løsningen. Model venligst stillet til rådighed af Systime.

Modellering inkluderer – ud over selve modelleringskompetencen – typisk andre matematiske kompetencer. Afgrænsning af problemet og oversættelsen fra virkelighed til matematik omfatter kommunikations-, repræsentations- og symbolbehandlingskompetencer. Den matematiske løsning af problemet involverer problembehandlingskompetence og fx ræsonnements- og hjælpemiddelkompetence, mens oversættelsen tilbage til virkeligheden, modelkritik samt præsentation af løsningen bl.a. involverer kommunikations- og repræsentationskompetence.

Udvikling af matematiske handle- og tænkemåder i designprocesser

Som beskrevet tidligere vil eleverne kunne udvikle flere matematiske handle- og tænkemåder gennem engineering. Dog afhænger det naturligvis dels af problemfeltet, dels i hvilket omfang handle- og tænkemåderne er relevante for at løse udfordringen, og dels i hvor høj grad lærerne vælger at stilladse matematikfaglige læringsprocesser i forløbet. Med udgangspunkt i konkrete forløb, vil vi illustrere, hvordan det kan tage sig meget forskelligt ud i en designproces.

EKSEMPEL 2

MATEMATIK I LODRETTE HAVER

Eleverne i en 7.-klasse arbejder i fire uger med det tværfaglige engineering-forløb "lodrette haver". Udfordringen lyder således:

I skal udvikle en lodret have, som passer til jeres klasseværelse eller til væggen ved kantinen. Følgende gælder for de lodrette haver:

- Skal kunne hænge lodret på en måde, så planterne (karse) får optimale lysbetingelser.
- Skal indeholde en form for vandings-system, så der ikke skal vandes i kortere ferier og weekender, men samtidig må planterne ikke blive overvandet (drukne).
- Eventuelt overskudsvand må ikke løbe ud på gulvet/jorden, men skal opsamles eller sendes retur.
- Gødning skal udnyttes optimalt i jeres lodrette have og må ikke ledes ud fra haverne.
- Dyrkningsmaterialet (jorden) skal sammensættes optimalt i forhold til planternes optagelse af vand og gødning.

Klassens matematik- og biologilærer gennemfører forløbet sammen. I dette eksempel fremhæves, hvordan forskellige kompetenceområder fra matematik bliver bragt i spil.

I forløbet er der fokus på materialeforbrug, så da eleverne skal skitsere vandbeholderen til vandingssystemet, får de som bensepænd, at de skal bruge så lidt materiale som muligt. Dvs. at overfladen på beholderen skal være mindst mulig ift. rumfang. Her skal eleverne bruge geometrien til at beregne overflade og rumfang og finde bedst mulige forhold. Det sætter gang i matematiske diskussioner i grupperne, som eleverne understøtter med skitser og beregninger. Herved trænes både kommunikations-, ræsonnements- og modelleringskompetencerne. Også forbruget af plantefrø skal beregnes. Eleverne bliver guidet til at tænke vægt frem for antal, og ved at bruge estimeringer og systematik undersøger de, hvor mange gram frø der skal til at dække 10 x 10 cm. Derefter beregner de den samlede mængde ud fra deres prototypes beplantningsareal. Her bringes elevernes problembehandlingsstrategier i spil.

Når eleverne når til delprocessen *konkretisere*, skal de være helt konkrete og præcise omkring deres udformning af deres lodrette haver. Derfor skal de ud fra et egnet målestoksforhold tegne en målfast tegning af deres kommende prototype, og de træner derved kompetenceområdet matematiske repræsentationsformer.

Dette forløb har et særligt krav til præsentationen. Klassen skal deltage i Folkemødet på Bornholm og dér præsentere deres lodrette have. Dette gør, at eleverne er meget bevidste om at formidle deres nye viden i deres præsentationer. Grupperne bliver derfor enige om at medbringe skitser for dermed at tydeliggøre prototypernes opbygning og funktionaliteter, ligesom det er en støtte i præsentationen at inddrage et så centralt arbejdsdokument fra processen.



EKSEMPEL 3

MATEMATIK OG EN KATAPULT TIL KEJSER AUGUSTUS

En 5.-klasse skal arbejde med matematik og engineering ud fra et narrativ fra Romerriget. De skal udvikle en katapult til kejser Augustus. Klassens matematiklærer gennemfører forløbet alene hen over tre uger. Narrativ og udfordring lyder således:

Kejser Augustus (63 f.Kr. – 14 e.Kr.) ønsker at udvide sit territorium. Dette vil han gøre mod nord, men han møder kraftig modstand og stærkt befæstede byer med store fæstningsværker. Han har brug for et stærkt våben mod de befæstede byer, og derfor skal I hjælpe ham med at bygge nye katapulter.

*Udfordring: I skal bygge en katapult, der kan skyde over fæstningsværket og ramme huse-
ne i byen. Katapulten skal kunne:*

- skyde med en centicube
- skyde over en 30 cm høj mur, som er placeret 20 cm fra katapulten
- affyres ved hjælp af maks. 2 fingre.

Som indledning til forløbet ser eleverne videoer af forskellige typer katapulter. Når begejstringen over katapulternes skydeevne har lagt sig, fokuseres på den affyrede kugles bane. Eleverne skal beskrive kuglens forløb, og for at understøtte kommunikationskompetencen giver læreren dem matematiske begreber som fx affyringsvinkel, kuglebane og maksimal højde og opfordrer ligeledes eleverne til at lave skitser, mens de diskuterer.

Dette fører til mange interessante diskussioner. Flere grupper ender med at filme små kast for at se, hvordan kuglens bane er, og de når alle frem til den erkendelse, at kuglen bevæger sig symmetrisk omkring toppunktet. Her er kompetencen *ræsonnement* og tankegang i spil, da eleverne selv indser, at matematikken kan hjælpe dem til at løse opgaven. I delprocessen *konstruere* arbejder eleverne ud fra deres nye viden om kuglens bane. Alle grupperne har skitser, der viser, at kuglens bane skal have toppunkt over byens fæstningsværk, og udfordringen for mange er at finde den rette affyringsvinkel, så husene bag fæstningsværket rammes. Dette giver mange iterationer, og alle grupper må flere gange genbesøge deres skitser og ideproces samt udføre nye undersøgelser. Dermed forbedrer eleverne både deres undersøgelser, deres ideproces og deres konstruktion.

Afslutningsvis præsenterer alle grupper deres prototype, og det er tydeligt, at det fælles matematiske sprog, som eleverne kan bruge om katapultens egenskaber, giver faglige diskussioner undervejs. Klassen er særligt optaget af, hvilken forskel affyringsvinklen giver ift. kuglens landing. De ved nu, at affyringsvinkel = landingsvinkel, men de overvejer, hvad der giver størst effekt, når kuglen lander – om den lander så lodret som muligt eller så vandret som muligt.

Gennem eksempel 2 og 3, vil vi nu udfolde, hvordan matematiske handle- og tænkemåder kommer til udtryk i de syv delprocesser.

Forstå udfordringen: At forstå en problemstilling er et element i alle former for problemløsning – herunder virkelige problemer, som naturligt optræder i matematisk modellering og matematisk problemløsning. Desuden kan der i denne delproces være behov for at udtrykke udfordringen i et sprog, der indeholder matematiske formuleringer.

I eksempel 3, "Matematik og en katapult til kejser Augustus", anvendes en historisk kontekst for at skabe et narrativ for anvendelser af katapult. Det er ikke at foretrække ift. elevernes oplevelse af autenticitet, da evaluering viser, at det ikke giver den optimale motivation hos eleverne, men det er valgt i dette forløb, fordi det gav muligheder for at udvikle nogle særlige matematiske handle- og tænkemåder hos eleverne. De kommer i spil, når eleverne skal vurdere, om og hvordan matematik kan bidrage til en løsning på problemet. Eleverne skal gennemtænke, hvad de forskellige krav til katapulten betyder, og hvordan de skal inddrage matematik for at opfylde kravene til, hvor langt kuglen skal kunne nå, blandt andet ved at forstå, hvilken bane centicuben følger.

Undersøge: Problembehandlingsstrategier indgår, når eleverne opdeler problemet i elementer, der kan undersøges hver for sig. Undersøgelser involverer ofte matematiske modeller, fx i form af formel- og funktionsmodeller, ligninger og statistiske modeller, som repræsenteres gennem tabeller, grafer, diagrammer eller lignende. Matematiske hjælpemidler som programmet GeoGebra kan med fordel inddrages, og det samme med matematiske hjælpemidler til talbehandling som regneark eller CAS-programmer.

I eksempel 2, "Matematik i lodrette haver", brugte eleverne deres viden fra matematiktimerne til at lave systematiske optællinger, som de skrev ind i et regneark. Senere i forløbet undersøgte og beregnede eleverne, hvor mange gram karsefrø de skulle bruge i deres have.

Få ideer: Kommunikation er en væsentlig del af idegenereringen. Afhængigt af problemet kan matematiske formuleringer komme på tale. Ræsonnementer kan indgå i form af begrundet argumentation for at overbevise sig selv og andre om ideernes holdbarhed. Gennem skitser og matematisering af ideernes indhold kan eleverne arbejde med forskellige former af matematisk modellering. Eksempel 2, "Matematik i lodrette haver", illustrerer, hvordan eleverne skal lave visuelle modeller i form af skitser. Disse skitser bruger de, når de over for gruppen skal forklare og begrunde deres ideer om, hvordan vandbeholderens udformning skal være. Heri indgår det fx, at en cylinderform kan give en mindre overflade i forhold til volumen end en firkantet form.

Konkretisere: I denne delproces kan der fx indgå forskellige matematiske repræsentationsformer i form af geometriske tegninger, andre arbejdstegninger eller beregningsmodeller. Desuden kan der arbejdes med målestoksforhold. Igen kan GeoGebra med fordel inddrages. I eksempel 2, "Matematik i lodrette haver", arbejdede eleverne med målestoksforhold, da de ikke kunne lave de lodrette haver i fuld størrelse.

Konstruere: Konstruktion af en prototype involverer ofte matematiske ræsonnementer og argumenter, fx vedrørende beregninger, målinger og geometriske former, som kan henføres til matematisk modellering. Argumenter, der bygger på disse elementer, fx placering af prototypens forskellige dele, behandles geometrisk og beregningsmæssigt. I eksempel 3, "Matematik og en katapult til kejser Augustus", er det vigtigt, at eleverne med matematiske ræsonnementer og overvejelser argumenterer for, hvordan de forskellige dele bliver sat sammen, så centicuben bliver sendt af sted i den rigtige vinkel.

Forbedre: Delprocessen *forbedre* kan direkte overføres til modellering, idet denne delproces ofte omfatter flere iterationer, hvor modellen forbedres og forfines, fx ved at tilføje flere elementer eller variable. I eksempel 3, "Matematik og en katapult til kejser Augustus", skal eleverne tilpasse og ændre deres konstruktion af katapulten, indtil den virker tilfredsstillende.

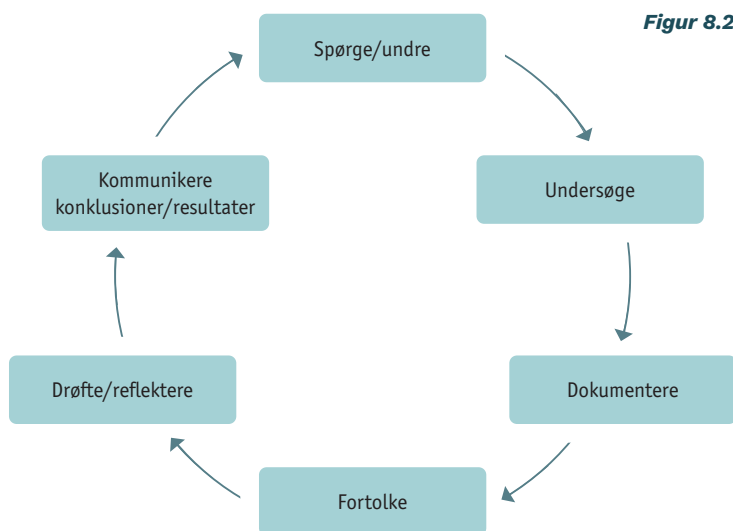
Præsentere: Når eleverne, både undervejs i designprocessen og i en eventuel afsluttende præsentation, deler viden og erfaringer med andre elever, vil handle- og tænkemåder fra matematik kunne kvalificere deres præsentationer, og samtidig kan eleverne i denne delproces arbejde med deres matematiske kommunikation.

Undersøgende matematik i engineering designprocesser

I en undersøgende matematik iscenesætter læreren, evt. sammen med eleverne, en undersøgelse fx ud fra en problemstilling, hvorefter eleverne selv, ofte i grupper, gennemfører undersøgelser, mens læreren stilladser og udstikker rammer. Sluttelig laves en opsamling på elevernes arbejde, og der drages konklusioner. Under elevernes arbejde opstiller de hypoteser, udvælger og afprøver strategier samt diskuterer og evaluerer deres resultater. Denne proces har stor lighed med engineering designprocessen – dog med den forskel, at eleverne i engineering-processen ikke blot undersøger et matematisk felt eller søger efter et matematisk svar, men arbejder med udvikling af en konkret prototype og et design, som ofte kræver inddragelse af kompetencer fra flere fag.

Uanset om eleverne i et engineering-forløb får brug for at arbejde med specifikke matematiske elementer eller ej, vil forløbet kunne bidrage til at udvikle elevernes kreativitet samt deres problemløsnings- og undersøgelsesstrategier, som de kan have gavn af i den almindelige matematikundervisning. Ofte indgår matematiske undersøgelser dog eksplicit i engineering-forløb.

Undersøgende matematikundervisning kan som regel opdeles i en række iterative delprocesser. Den cykliske model (figur 8.2) er en fremgangsmåde, som ofte anvendes ved undersøgende matematik. I en engineering designproces vil man langt hen ad vejen kunne arbejde med tilsvarende processer.



Figur 8.2: Cyklisk model for en undersøgende tilgang (Grødum et al. 2010, gengivet fra Hansen & Hansen, 2013).

Særligt i delprocessen *undersøge* fra engineering designprocessen vil eleverne opleve, at matematiske undersøgelser kan være relevante, også derudover vil elementer fra den cykliske model også indgå eller bidrage ind i de seks andre delprocesser.

Alle undersøgelsesaktiviteter kræver, at eleverne forstår den udfordring, de står over for. I engineering-forløb, hvor det ofte er nødvendigt at trække på flere fagligheder, handler denne delproces om at have øje for, at udfordringen kan opdeles i elementer, der kan løses vha. de forskellige fagligheder, herunder matematiske undersøgelser. Fx har eleverne i forløbet "Regn med vand" brug for at undersøge vandforbrug og indsamle og behandle data for at forstå omfanget af udfordringen. Eleverne kan, evt. med støtte fra læreren, stille spørgsmål som fx "hvilke beregninger skal vi lave for at kunne bestemme vandforbruget?", "hvilke data har vi brug for til vores beregninger?" og "hvordan finder vi repræsentative data?". I undersøgende matematikundervisning vil denne delproces typisk være tæt koblet til selve undersøgelsen, hvor ideerne afprøves og evalueres.

I forløbet "Regn med vand" har eleverne brug for at indsamle data gennem teoretiske undersøgelser, fx statistiske materialer og oversigter fra husstandens forbrugsoversigter, eller de kan iværksætte egne konkrete undersøgelser, hvor de fx måler vandforbrug for en bruser, en vandhane mv. Når elever skal konkretisere deres ideer, kan de fx drøfte og reflektere på baggrund af deres undersøgelser, så konklusioner fra matematiske undersøgelser kvalificerer deres valg.

Afhængigt af udfordringen og elevernes valg kan konstruktionen af prototypen involvere matematiske elementer såsom målinger, geometriske konstruktioner eller figurer, beregninger mv. Hvis eleverne fx skal bygge en vandspareanordning, er der behov for målinger og beregninger, så anordningen passer til en vandhane el.lign. Oftest vil der også være specifikke krav til prototypen; her bliver behovet for matematiske overvejelser, beregninger og metoder påtrængende.

Eleverne vil ofte springe mellem de forskellige delprocesser i engineering designprocessen. Det samme gør sig gældende i den cykliske model. Forbedring kan ske, fx hvis eleverne opdager, at deres datagrundlag er for sparsomt eller ikke repræsentativt for den ønskede løsning; fx kan vandforbrug være afhængigt af årstid, hvilke installationer der er i husstanden, hvor længe man tager bad, osv. Der kan derfor være behov for at lave flere undersøgelser for at kunne skabe et mere generaliseret billede af forbruget. I det tilfælde kan der være behov for, at eleverne gentager eller tilpasser deres matematiske undersøgelser, spørger og undrer sig og eventuelt laver helt nye matematiske undersøgelser.

I løbet af engineering designprocessen kan der være behov for, at eleverne deler deres viden. Her kan flere af elementerne fra undersøgende matematik inddrages. Eleverne kan kommunikere konklusioner og resultater, de kan drøfte og reflektere over deres undersøgelser eller fortolke på hinandens resultater. Samtidig kan delprocessen *præsentere* bruges til at formidle processen, resultater, konklusioner og forslag. Forud for en præsentation må eleverne fortolke og reflektere over deres resultater, fx gennem matematiske ræsonnementer, så de kan gøre rede for gyldigheden af resultaterne. I præsentationer i engineering-forløb vil der ofte indgå relevante beregninger, tabeller og diagrammer, hvor eleverne må vurdere, hvilke matematiske repræsentationer der bedst udtrykker deres proces og resultater. Desuden må de tilpasse formidlingen til et fagligt niveau, der er passende for modtagerne.



